**O Espaço-tempo Curvo da Relatividade Geral**

Tanto o espaço euclideano como o espaço-tempo da relatividade restrita são espaços planos. Ao procurar compatibilizar a interacção gravitacional com as ideias da relatividade restrita, onde sobressai a noção da velocidade da luz como velocidade limite para a transmissão das acções físicas, Einstein é levado, ao fim de uma luta intelectual intensa, a renunciar ao espaço-tempo plano. Na presença de um campo gravítico é necessário incluir todos os tipos de movimentos relativos e não só os movimentos uniformes. Será possível generalizar o Postulado (1) de modo a aplicá-lo a todos os observadores de um campo gravítico? Vejamos, numa linguagem simples, quais as considerações que orientaram o pensamento de Einstein. Começo pelo carácter universal da gravitação. A interacção gravitacional tem uma natureza única entre todas as forças: todos os corpos caem ao longo da mesma trajectória espacial independentemente da sua massa e da sua constituição. Este facto sugere que a gravidade não é realmente uma força mas uma propriedade geométrica do espaço ou, no contexto da relatividade, do espaço-tempo. Neste ponto surge a ideia revolucionária de Einstein: os observadores em queda livre num campo gravítico identificam-se com os observadores inerciais da relatividade restrita no que diz respeito às suas observações locais (Princípio da Equivalência). Mas, ao contrário da relatividade restrita, dois observadores em queda livre não mantêm uma velocidade uniforme entre si devido aos efeitos não locais do campo gravítico. Realmente, dois corpos em queda livre à superfície da Terra não descrevem trajectórias exactamente paralelas pois, sendo o campo central, as trajectórias convergem para o centro de massa, embora, a uma escala local, as trajectórias sejam quase paralelas (Fig. 2). Para justificar estas diferenças face à relatividade restrita, Einstein identifica a gravidade com uma modificação em relação à geometria euclideana: a gravitação produz uma **curvatura** do espaço-tempo. As linhas do Universo dos observadores em queda livre serão as geodésicas deste espaço-tempo curvo. Claro que agora as geodésicas já não são linhas rectas, como no espaço plano, mas sim as linhas ``mais direitas" que o espaço-tempo curvo admite.

Mas o que é a curvatura do espaço? E como se determina essa curvatura? Todos os que imaginam o espaço como um vazio de coisas materiais, o que resta quando abstraímos os objectos e os seres presentes, ficam perplexos com a noção de um espaço curvo. Para a maioria das pessoas, o espaço destina-se a ser ocupado pelos corpos nos seus movimentos relativos, o espaço é o palco onde se desenrolam os diferentes acontecimentos. Para o matemático, um espaço é uma colecção de ``pontos", cuja natureza pode variar consoante as aplicações matemáticas e/ou físicas. Assim, o espaço vazio pode ser entendido como um espaço sem matéria, mas não como um espaço sem propriedades definidas entre os seus elementos (pontos). Por exemplo, os pontos do espaço-tempo da teoria da relatividade são acontecimentos físicos, isto é, algo que ocorreu num certo local e num certo instante. Vimos já que o conjunto de todos os acontecimentos físicos forma um espaço contínuo a quatro dimensões. Na ausência de campos gravíticos, ou seja, quando estamos suficientemente afastados das distribuições de matéria e energia, este contínuo é o espaço-tempo da relatividade restrita. Neste espaço-tempo os sistemas de coordenadas inerciais são análogos aos sistemas cartesianos de coordenadas rectilíneas da geometria euclideana. Tomando só duas dimensões, é possível representar estes sistemas de coordenadas num plano (numa folha de papel, por exemplo). Mas já não é tão fácil usar um sistema de coordenadas rectilíneas numa superfície esférica. Sobre a folha de papel posso traçar um reticulado de segmentos de recta perpendiculares entre si e, com estas coordenadas, posso determinar a posição de qualquer ponto do papel (bastando um único sistema de coordenadas para determinar todos os pontos do papel). Envolvendo a esfera com a folha de papel, verifico que não é possível ajustar o papel à esfera sem dobrá-lo. Deste modo, sou obrigado a sobrepor diferentes porções do reticulado com as mesmas porções da esfera. Nestas condições, não é possível estabelecer uma correspondência unívoca entre os pontos da esfera e os pontos do papel. É necessário que o papel tenha uma área maior do que a área da esfera para que seja possível envolvê-la completamente com a folha de papel. Em contrapartida, no caso de um cilindro não existe qualquer dificuldade em envolvê-lo com uma única folha de papel, e sem necessidade de a dobrar. Existe, portanto, uma correspondência (aplicação) bem definida entre os pontos do papel e os pontos da superfície do cilindro. A folha de papel e o cilindro são espaços (bi-dimensionais) intrinsecamente planos e a esfera é um espaço (bi-dimensional) intrinsecamente curvo (Fig. 3). Como estender esta noção de curvatura a espaços com mais dimensões sem os ``mergulhar" em espaços planos de dimensão superior? Para isso teremos de olhar para as suas características intrínsecas.

Entre os axiomas da geometria euclideana existe um que foi sempre uma fonte de grande controvérsia até meados do século XIX. Refiro-me ao *axioma das paralelas* que estabelece o seguinte: por um ponto do espaço só passa uma paralela a uma recta dada. Duas linhas rectas complanares dizem-se paralelas se não se intersectam. Há algo de incómodo nesta definição que, segundo consta, dava que pensar ao próprio Euclides. Na vida real só encontramos segmentos de recta, nunca linhas rectas (cujo comprimento é infinito). Põe-se, pois, a seguinte questão: como podemos ter a certeza que dois segmentos de recta se mantêm à mesma distância quando prolongados indefinidamente?

Ao longo dos tempos, várias pessoas tentaram encontrar um axioma mais básico, do qual se pudesse deduzir o axioma das paralelas. Foi o caso de John Wallis no século XVII e também o de Geralamo Sacherri no século seguinte. Este último, na sua obra *A Prova de Euclides*, publicada em 1733, pensou erradamente que tinha finalmente estabelecido o axioma das paralelas como uma verdade transparente. Nesta obra, Sacherri derivou e discutiu muitos teoremas não-euclideanos mas sem se aperceber que a geometria não-euclideana podia ter uma validade teórica igual à geometria de Euclides. Para Emanuel Kant, que partilhava neste campo da crença dominante, a geometria de Euclides era uma verdade cristalina, sem alternativa. Na sua *Crítica da Razão Pura* Kant tentou colocar a geometria euclideana numa base sólida argumentando para isso que os seus axiomas eram *a priori*, isto é, anteriores à experiência e, portanto, uma ``necessidade inevitável do pensamento".

Hoje sabemos que o axioma das paralelas não pode ser reduzido a outro axioma mais básico, e é fundamental para distinguir o espaço euclideano de todos os outros espaços possíveis. No espaço euclideano o perímetro de uma circunferência é igual a vezes o seu diâmetro: , e a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos rectos: . Noutros espaços estas relações são diferentes, como veremos. De todos os espaços não-euclideanos só há dois que são também **uniformes** no mesmo sentido do espaço euclideano, ou seja, são homogéneos e isotrópicos, pois todos os seus pontos e todas as suas direcções são equivalentes. O primeiro destes espaços tem uma geometria **hiperbólica** e foi descoberto independentemente por Johann Gauss, Nikolai Lobachevsky e Janos Bolyai; o segundo tem uma geometria **esférica** e foi descoberto por Georg Riemann. Estes espaços têm uma escala intrínseca de comprimento que vamos representar por *R*. Se considerarmos regiões de um espaço uniforme cujas dimensões sejam muito pequenas em relação a *R*, então as suas geometrias assemelham-se localmente à geometria euclideana. Portanto, quando *R* é muito grande não é fácil distinguir entre os três espaços uniformes. Observadores que vivam em espaços com geometria esférica ou hiperbólica, mas que só tenham acesso ao que se passa na sua vizinhança imediata, pelo estudo de fenómenos locais, terão tendência a pensar em termos da geometria de Euclides.

Os três espaços uniformes distinguem-se pelos seguintes postulados: (1) No espaço hiperbólico, por um dado ponto passam muitas geodésicas paralelas a uma geodésica dada; (2) no espaço euclideano só passa uma geodésica paralela nas mesmas condições, como sabemos; (3) no espaço com geometria esférica, não existe nenhuma geodésica paralela a uma geodésica dada. Por outro lado, no espaço hiperbólico o perímetro de uma circunferência é maior que vezes o seu diâmetro: , e a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois ângulos rectos: ; e, no espaço esférico, o perímetro de uma circunferência é menor que vezes o seu diâmetro: , e a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois ângulos rectos: .

Para ilustrar um espaço esférico dispomos obviamente da superfície de uma bola. Mas é mais difícil dar um exemplo de um espaço hiperbólico bi-dimensional (Fig. 4). David Hilbert, um dos mais célebres matemáticos do princípio do século, mostrou que não ser possível construir uma superfície bi-dimensional imersa num espaço euclideano, que represente a geometria de um espaço hiperbólico, uniforme por toda a parte. A superfície de uma pseudo-esfera tem uma geometria hiperbólica mas não é uniforme, pois os seus pontos não são todos equivalentes. A superfície em forma de ``sela" é homogénea e isotrópica, mas apenas numa pequena região central; no entanto, tem a virtude de ilustrar que o espaço hiperbólico é **aberto** e de extensão infinita (tal como o espaço euclideano). Por sua vez uma superfície esférica põe em evidência como a geometria esférica é **fechada** e de extensão finita. Estes espaços curvos têm a designação comum de espaços riemannianos.

Do ponto de vista da curvatura, os três espaços uniformes distinguem-se porque:

* 1. o espaço esférico tem curvatura positiva (*K*>0);
* 2. o espaço euclideano tem curvatura nula (*K*=0);
* 3. e o espaço hiperbólico tem curvatura negativa (*K*<0).

No caso dos espaços bi-dimensionais uniformes a curvatura é dada por , onde *R* é o raio de curvatura, a escala intrínseca de comprimento já mencionada. No caso geral, uma superfície bi-dimensional tem dois raios de curvatura, e , medidos, em cada ponto, em direções perpendiculares entre si; mas se a superfície é uniforme , existe um único raio de curvatura, com o mesmo valor em todos os pontos da superfície. Quando os raios de curvatura são medidos para o mesmo lado da superície, a curvatura diz-se positiva: *K*>0; quando os raios de curvatura são medidos em lados opostos da superfície, a curvatura diz-se negativa: *K*<0. Uma superfície plana tem um raio de curvatura infinito e a curvatura é, portanto, nula: *K*=0. Num espaço homogéneo e isotrópico, a soma dos três ângulos internos de um triângulo menos dois ângulos rectos é igual curvatura vezes a área do triângulo:



Com esta fórmula podemos determinar a curvatura de um modo intrínseco, sem necessidade de recorrer a espaços de dimensão superior.

Até aqui temos considerado apenas superfícies bi-dimensionais imersas num espaço euclideano tri-dimensional para mais facilmente ilustrar o conceito de curvatura. Mas é possível estender este conceito a espaços de dimensão qualquer. Porém, num espaço tri-dimensional a curvatura é um objecto bem mais complicado, contendo seis componentes que, em geral, têm diferentes valores. Se o espaço é uniforme, três das componentes são nulas e as outras três são constantes por toda a parte e iguais entre si; quando o espaço é plano todas as componentes se anulam. Num espaço(-tempo) com quatro dimensões, como na relatividade, a curvatura tem vinte componentes, que são todas nulas na relatividade restrita.

Se quisermos pensar na curvatura como uma ``deformação" de um espaço que está imerso num espaço plano de dimensão superior, já sabemos que para um espaço curvo bi-dimensional necessitamos de um espaço plano tri-dimensional; mas para um espaço curvo tri-dimensional necessitamos, em geral, de um espaço plano com seis dimensões; e para um espaço curvo quadri-dimensional teremos de recorrer, em geral, a um espaço plano com dez dimensões. A teoria da relatividade geral de Einstein descreve o nosso Universo como um espaço-tempo curvo com quatro dimensões. Mas quando falamos aqui de curvatura não procuramos visualizar o espaço-tempo como estando imerso num espaço-tempo plano com dez dimensões. A curvatura deve ser aqui entendida como uma propriedade geométrica intrínseca. Aliás, um espaço plano não é em nada mais fundamental do que um espaço curvo, e é bem mais difícil imaginar um espaço com dez dimensões, embora plano, do que um espaço quadri-dimensional curvo.

Desde Kepler que os físicos empregavam a geometria euclideana no espaço vazio do sistema solar para determinar as trajectórias dos planetas em torno do Sol. A geometria euclideana parecia funcionar bem nestas paragens remotas com uma excepção: o avanço do periélio do Mercúrio (o ponto da órbita elíptica do planeta mais próximo do Sol) de 43 segundos de arco por século representava uma ``deformação" da órbita que não era possível explicar como sendo devida apenas às perturbações provocadas pelos outros planetas. Embora essa deformação seja pequena, a sua origem permaneceu misteriosa até ao princípio do século, quando Einstein completou a sua teoria da relatividade geral. A proposta revolucionária de Einstein, tal como se explicou acima, foi identificar a gravidade com o desvio em relação à geometria euclideana, ou seja, com a curvatura do espaço. Deste ponto de vista os planetas não se movem numa trajectória elíptica em torno do Sol, como supunha Newton, com o Sol a exercer uma *força* gravítica sobre eles para os afastar das suas trajectórias rectilíneas naturais. Em vez disso, a gravidade do Sol é interpretada como uma deformação do espaço (e do tempo) na sua vizinhança, e os planetas limitam-se a seguir as trajectórias mais ``fáceis" -- os caminhos que minimizam as suas acções mecânicas através do espaço curvo. Estes caminhos mais fáceis (as geodésicas) são afinal muito próximos dos caminhos ``forçados" tomados pelos planetas segundo a teoria da força gravítica de Newton. Mas não são exactamente iguais. A órbita de Mercúrio, por exemplo, avança 43 segundos de arco por século. Um efeito semelhante ocorre com todos os outros planetas mas, dada a proximidade do Sol, o efeito é mais significativo no caso do Mercúrio. Este foi o grande triunfo de Einstein.

Se o espaço à roda do Sol não é exactamente euclideano, também é natural que as imagens das estrelas que se encontram na direcção do Sol cheguem até nós algo deformadas, como foi observado por Sir Arthur Eddington em 1919 na Ilha do Príncipe, durante um eclipse solar. Este efeito ocorre sempre que a luz passa na proximidade de qualquer objecto celeste e é tanto mais importante quanto maior for a curvatura do espaço(-tempo), isto é, quanto mais intenso for o campo gravítico do objecto junto do qual passam os raios luminosos (Fig, 5).

A outra maneira do campo gravítico influenciar o comportamento da luz tem a ver com a mudança de frequência. Numa linguagem newtoniana, é fácil entender que a luz emitida por uma estrela dispende uma certa energia para vencer a barreira de potencial que a separa do observador. Este dispêndio de energia traduz-se num deslocamento das riscas do espectro da radiação emitida para a zona do vermelho. Einstein previu teoricamente este deslocamento gravitacional das frequências pela primeira vez em 1911, antes de completar a teoria da relatividade geral, por meio de um raciocínio heurístico. Vejamos como descrever quantitativamente este efeito.

Consideremos dois átomos idênticos, A e B, que se encontram em repouso a distâncias diferentes num certo campo gravítico. O átomo A emite luz cuja frequência apresenta um deslocamento para o vermelho, dado por



para um observador colocado junto do átomo B, e sendo a diferença de potencial gravítico entre B e A. Podemos identificar os átomos com relógios atómicos e a frequência da luz emitida com a frequência de referência desses relógios. Sempre que o relógio A avança um segundo, A envia um sinal luminoso para B. De acordo com a equação anterior os sinais luminosos emitidos por A chegarão a B com uma frequência que é menor que a frequência de B. Como não se perde nenhuma informação de A para B devemos concluir que o relógio A avança mais lentamente que o relógio B. Enquanto o relógio B mede um segundo, emite durante o mesmo tempo ondas mas recebe somente ondas de A. Por outras palavras, durante o intervalo de tempo , o relógio A mede



Na mecânica newtoniana, o potencial gravítico à superfície duma estrela de raio *R* e massa *M* é dado por



onde *G* é a constante de gravitação de Newton. Se o relógio B se encontra muito afastado da massa responsável pelo campo gravítico, podemos fazer e se A está à superfície da estrela, vem



Em resumo: os relógios movem-se mais lentamente na vizinhança dos campos gravitacionais intensos (Fig. 6). No caso do Sol ; logo, um relógio situado à superfície do Sol atrasar-se-ia por um factor de em relação a um relógio idêntico colocado na Terra, onde se faz , pois à superfície da Terra. Mas à superície de uma estrela de neutrões ( ) o efeito é mais significativo! A equação anterior foi obtida sem a intervenção das equações de Einstein da relatividade geral. A expressão exacta, para um campo gravítico com simetria esférica, toma a forma



com base numa solução das equações de Einstein obtida por Karl Schwarzschild em 1916. mede o intervalo de tempo próprio de um relógio colocado a uma distância da estrela cuja coordenada radial é *R* e é o intervalo de tempo próprio medido por um relógio que se encontra muito afastado da estrela, fora da influência do campo gravítico.

Em termos das frequências, e supondo que o relógio A tem a coordenada radial e o relógio B a coordenada radial , obtemos a seguinte expressão para o deslocamento espectral



no caso em que e . Se A (emissor) está mais perto do objecto que cria o campo gravítico do que B (receptor), então , e o deslocamento é para o vermelho, mas para um sinal enviado de B para A o deslocamento é para o azul. Esta fórmula foi verificada em 1960 por Robert V. Pound e Glenn A. Rebka, usando a torre de de altura do Laboratório de Física de Jefferson, na Universidade de Harvard.

Para finalizar esta introdução à teoria de Einstein, vamos destacar os aspectos essenciais que distinguem a relatividade restrita da relatividade geral. Na relatividade restrita o espaço-tempo é plano e pode ser visto como um palco onde se desenrolam os acontecimentos físicos. A estrutura de cones de luz que nos dá a relação causal entre os acontecimentos é rígida, isto é, é a mesma em todos os pontos do espaço-tempo e para todos os observadores, sejam estes inerciais ou acelerados. Note-se que os observadores acelerados podem não ter acesso a todos os acontecimentos físicos. Na relatividade geral o espaço-tempo é geralmente curvo, adquirindo um carácter dinâmico que lhe permite descrever o comportamento das partículas materiais e da luz na presença de uma dada distribuição de matéria. Como consequência, a estrutura de cones de luz varia de ponto para ponto (Fig. 7). A curvatura do espaço-tempo desempenha nesta teoria um papel equivalente ao da força gravítica na teoria de Newton, adquirindo o carácter dinâmico de interacção com a matéria. Nas palavras do físico americano John Wheeler, a matéria diz ao espaço como deve curvar e a geometria (curvatura) diz á matéria como se deve deslocar. O espaço-tempo da relatividade geral reduz-se, obviamente, ao espaço-tempo plano da relatividade restrita nas regiões suficientemente afastadas das distribuições de matéria e energia.